05/05/2017

Μάθημα 14ο
Απει4

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

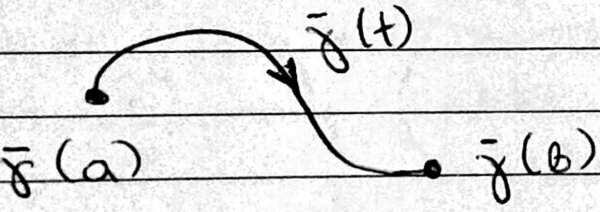
ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^n$ (κάποια στοιχεία) (Υπενθύμιση Απει ΙΙΙ)

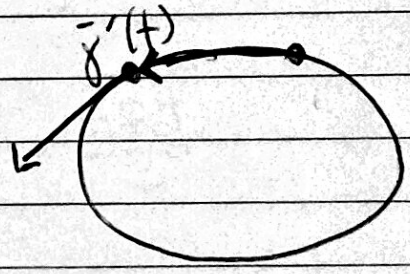
__Ορισμοί:__

- __Παραμετρική καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$__ είναι μια $\bar{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ η οποία είναι συνεχής.

  Η εικόνα της $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}([a,\beta]) = C \subset \mathbb{R}^n$, αναφέρεται __καμπύλη__ (ή εικόνα της παραμετρικής καμπύλης $\bar{\gamma}$)

  [συνήθως όταν λέμε καμπύλες εννοούμε __παραμετρικές καμπύλες__]





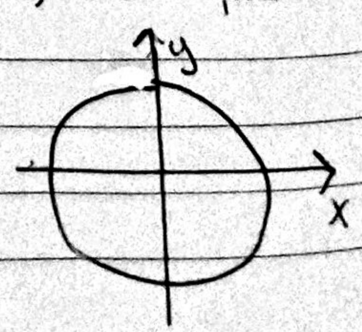
- Αν η $\bar{\gamma} : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ είναι 1-1 λέγεται __απλή__.
- Τα $\bar{\gamma}(a)$, $\bar{\gamma}(\beta)$ λέγονται __αρχικό και τελικό σημείο__ της $\bar{\gamma}$, αντίστοιχα.
- Αν $\bar{\gamma}(a) = \bar{\gamma}(\beta)$ η $\bar{\gamma}$ λέγεται __κλειστή__.

__πχ__ $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

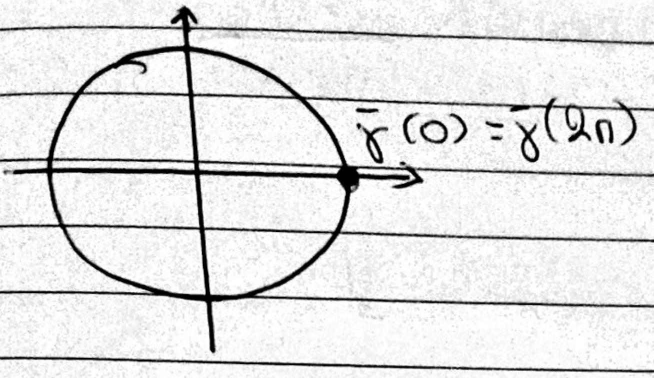
(όπως και $\bar{\delta}(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$)

έτσι ώστε $\bar{\gamma}([0,2\pi]) = \bar{\delta}[(0,\pi)] = C$, $t \in [0,\pi]$

ο κύκλος ακτίνας 1 κέντρου $(0,0)$

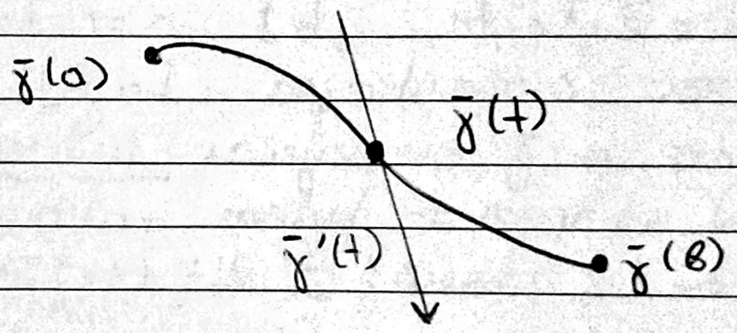


Μια καμπύλη $\bar{\gamma}$ λέγεται <u>απλή κλειστή</u>, αν $\bar{\gamma}\big|_{[\alpha,\beta)}$ απλή.



• Έστω $\bar{\gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ διαφορίσιμη, δηλ.:
$\forall t\in[\alpha,\beta] \ \exists\ \bar{\gamma}'(t)=\begin{pmatrix}\bar{\gamma}_1(t)\\ \vdots \\ \bar{\gamma}_n(t)\end{pmatrix}$, το εφαπτόμενο διάνυσμα

της $\bar{\gamma}$ στο σημείο $\bar{\gamma}(t)$.



• Ένα σημείο $\bar{\gamma}(t)$ της $\bar{\gamma}$ λέγεται:
- κανονικό (regular) αν $\bar{\gamma}'(t)\neq 0$
- ιδιάζον (singular) αν $\bar{\gamma}'(t)=0$

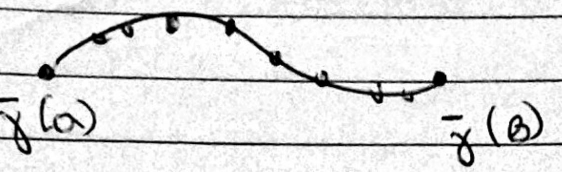
και μια C^1-καμπύλη $\bar{\gamma}$ (συν. διαφορ. καμπύλη $\bar{\gamma}$) $\rightsquigarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\bar{\gamma}'(t_\nu)\to\bar{\gamma}'(t_0)\Leftrightarrow \|\bar{\gamma}'(t_\nu)-\bar{\gamma}'(t_0)\|\to 0 \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \gamma_i' \to \gamma_i'(t_0)\ \forall i=1,\dots,n \Leftrightarrow \gamma_i' \text{ συνεχής}\\ \text{στο } t_0\ \forall i=1,\dots,n\end{array}\right]$$

$\rightsquigarrow$ κανονική $\forall t\in[\alpha,\beta]$ λέγεται <u>κανονική καμπύλη</u>

<u>Άρα</u>: $\bar{\gamma}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$ κανονική καμπύλη $\Leftrightarrow$
$\bar{\gamma}$ συνεχώς διαφορίσιμη με $\bar{\gamma}'(t)\neq 0$ $\forall t\in[\alpha,\beta]$

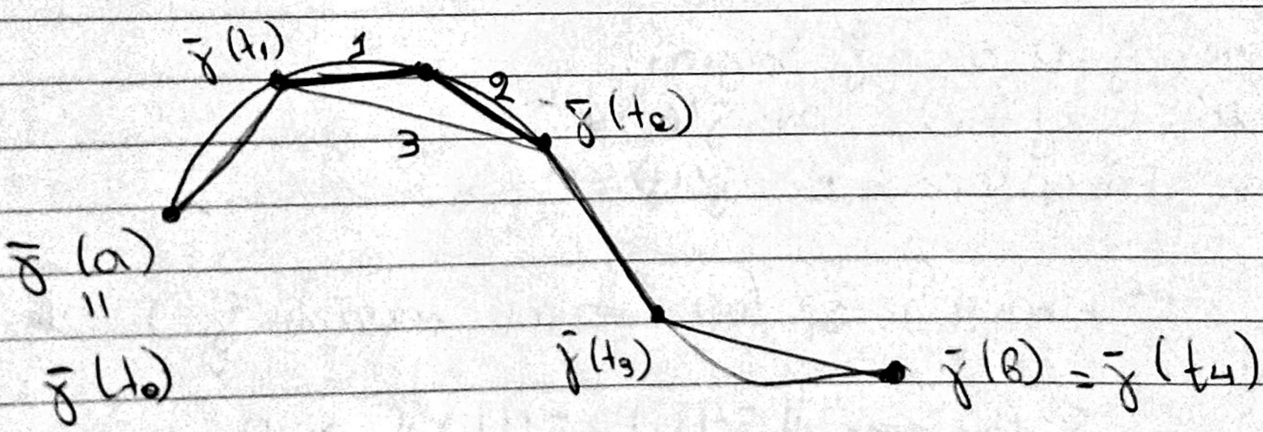
$\Rightarrow$ για μια κανονική καμπύλη ορίζεται σε κάθε $t\in[a,\beta]$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα $\dfrac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$



Μήκος καμπύλης

Ορισμός: Έστω $\bar\gamma:[a,\beta]\to\mathbb{R}^n$ μια παραμετρική καμπύλη και $P([a,\beta])$ το σύνολο των διαμερίσεων $P=\{t_0,t_1,\dots,t_\nu\}$, $a=t_0<t_1<\dots<t_\nu=\beta$ του διαστήματος $[a,\beta]$.
Τότε η $\bar\gamma$ ονομάζεται ευθυγραμμίσιμη (rectifiable) αν υπάρχει το μήκος καμπύλης:

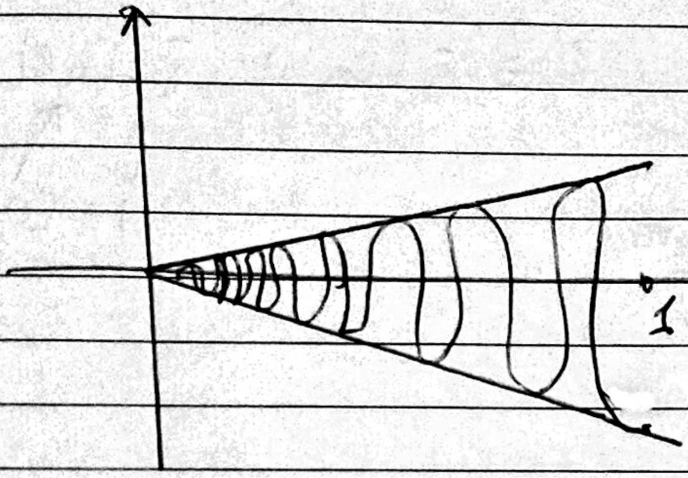
$$L(\bar\gamma)=\sup\left\{\sum_{k=1}^{\nu}\|\bar\gamma(t_k)-\bar\gamma(t_{k-1})\| : P=\{t_0,t_1,\dots,t_\nu\}\in P([a,\beta])\right\}$$



Παράδειγμα (Μη ευθυγραμμίσιμης καμπύλης αλλά συνεχούς!)

$$\bar{\gamma}_g(t) = (t, g(t)), \quad g(t) = \begin{cases} t\cos(\pi/t) & , t\in[0,1] \\ 0 & , t=0 \end{cases}$$

$t\in[0,1]$



Θεώρημα 3.72

Μια C^1 καμπύλη $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ είναι ευθυγραμμίσιμη με μήκος (καμπύλης) $L(\bar{\gamma}) = \int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\|dt$

$$\frac{\|\bar{\gamma}(t_k)-\bar{\gamma}(t_{k-1})\|}{t_k-t_{k-1}}$$

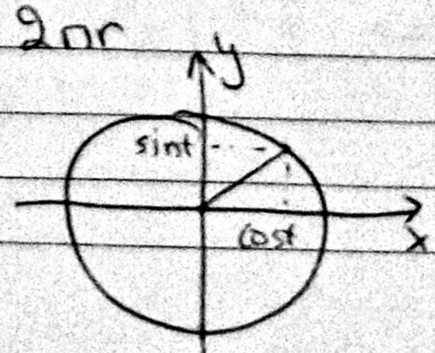
Απόδειξη
(Βλέπε σημειώσεις)

Πχ Έστω $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=r^2\}$

τότε $\bar{\gamma}(t) = r(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ με $\bar{\gamma}([0,2\pi])=C$

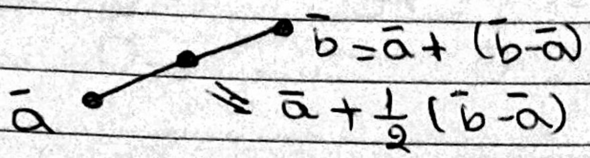
$\bar{\gamma}'(t) = r(-\sin t, \cos t) \Rightarrow \|\bar{\gamma}'(t)\| = r \Rightarrow$

$\Rightarrow L(\bar{\gamma})(=L(C)) = \int_0^{2\pi}\|\bar{\gamma}'(t)\|dt = 2\pi r$



Παράδειγμα. Έστω το ευθύγραμμο τμήμα από το $\bar{a}$ στο $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{b} \neq \bar{a}$

$\Rightarrow E = \{ \bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a}) : \lambda \in [0,1] \}$



$$E = \{ \underbrace{\bar{a} + \lambda(\bar{b} - \bar{a})}_{\in \mathbb{R}^n} : \lambda \in [0,1] \} \overset{?}{=} \bar{\gamma}([a,b]), \quad \bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

$t \downarrow \lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow \bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \bar{\gamma}'(t) = \bar{b} - \bar{a}, \quad t \in [0,1]$

$\Rightarrow \|\bar{\gamma}'(t)\| = \|\bar{b} - \bar{a}\|$

$E = \bar{\gamma}([0,1]) = \{ \bar{\gamma}(t) = \bar{a} + t(\bar{b} - \bar{a}) : t \in [0,1] \}$

$\Rightarrow L(\bar{\gamma}) = \int_0^1 \|\bar{\gamma}'(t)\| \, dt = \|\bar{b} - \bar{a}\|$

Μια "εύκολη" ("απλή") παραμετρικοποίηση του Ε είναι

π.χ. $\bar{\delta}(t) = \bar{a} + \underbrace{t\|\bar{b} - \bar{a}\|}_{\in [0, \|\bar{b} - \bar{a}\|] \text{ αφού } t \in [0,1]} \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{\|\bar{b} - \bar{a}\|}$

$$\Rightarrow \bar{\delta}(\tau) = \bar{a} + \tau \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\|\bar{b} - \bar{a}\|}, \quad \tau \in [0, \|\bar{b} - \bar{a}\|]$$

$$\Rightarrow \bar{\delta}'(\tau) = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{\|\bar{b} - \bar{a}\|} \Rightarrow \|\bar{\delta}'(\tau)\| = 1.$$

Το $\bar{\delta}$ είναι η λεγόμενη παραμετρικοποίηση του C ως προς μήκος καμπύλης (:$\Leftrightarrow$ η $\bar{\delta}$ έχει $\|\bar{\delta}'(t)\| = 1$, $\forall t \in [a,\beta]$)

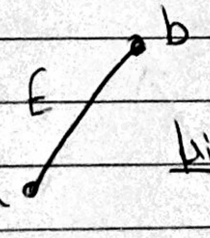
Αναπαραμετρικοποιήσεις Καμπυλών

Ορισμός: Έστω $\bar{\gamma} : [a,\beta] \to \mathbb{R}^n$ μία καμπύλη και $\varphi : [A,B] \to [a,\beta]$ μία 1-1 και επί συνεχής απεικόνιση. Τότε λέμε ότι η $\bar{J} := \bar{\gamma} \circ \varphi : [A,B] \to \mathbb{R}^n$ προκύπτει από την αναπαραμετρικοποίηση (Α.Π.Μ) της $\bar{\gamma}$ κάτω από την φ, και ο παραμετρικός μετασχηματισμός (π.μ.) φ διατηρεί τον προσανατολισμό της $\bar{\gamma}$:$\Leftrightarrow$ φ αύξουσα

αντιστρέφει τον προσανατολισμό :$\Leftrightarrow$ φ φθίνουσα

πχ. $\varphi(\tau) = 2\tau = t$, $t \in [0,1]$
$\tau \in [0, 1/2]$

πχ.

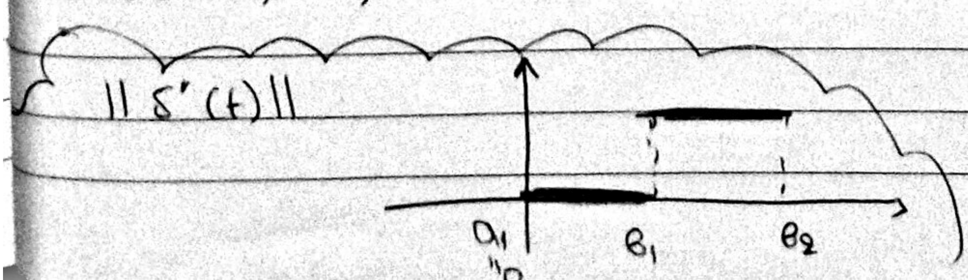


$L(C) = \|\bar{b} - \bar{a}\|$

μία παραμετρ.: $\bar{\gamma}(t) = a + t \dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{\|\bar{b}-\bar{a}\|}$, $t \in [0, \|\bar{b}-\bar{a}\|]$

μία άλλη παραμετρ: $\bar{\delta}(s) = \begin{cases} \bar{a} & , s \in [a_1, \beta_1] \\ \bar{a} + s \dfrac{2(\bar{b}-\bar{a})}{\|\bar{b}-\bar{a}\|} & , s \in [a_2, \beta_2] \end{cases}$

$\Rightarrow \forall s \in [a_1, \beta_1]$, $\bar{\delta}'(s) = \bar{0} \Rightarrow \bar{\delta}$ δεν είναι κανονική



Ορισμός: Αν $\varphi : [A,B] \to [a,b]$ είναι ένας C^1 παραμ. μετασχ.
ΣΘΔ ο παραμ. μετασχ. φ θα είναι C^1, τότε:
ο φ διατηρεί προσανατολισμό.

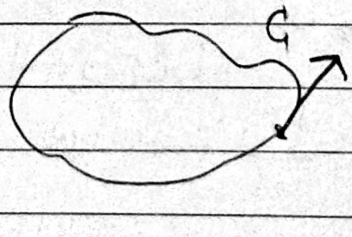
(αντιστρέφει τον προσανατολισμό), αν $\varphi'(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [A,B]$
(Αν $\varphi'(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [A,B]$ αντίστοιχα)

Προσανατολισμός: Ο τρόπος με τον οποίο η $\bar{\gamma}$ «διατρέχει» την εικόνα $C = \bar{\gamma}([a,b])$

- Για κλειστές απλές καμπύλες λέμε ότι η $\bar{\gamma}$ διατρέχει το C, με τον θετικό προσανατολισμό, αν αυτό που περικλείεται από την C είναι στα αριστερά κατά την κίνησή μας (στον $\mathbb{R}^2$)

(βλ. Θεώρημα Jordan)
Αυτό για να εφαρμοστεί απαιτεί κανονικές καμπύλες

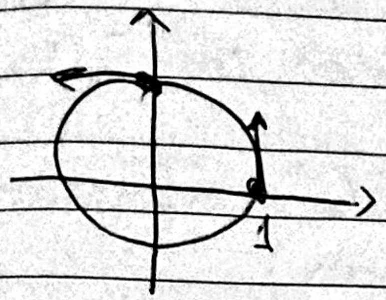
- Πως βρίσκω τι είναι στα αριστερά μου?



πχ Θεωρώντας το $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\bar{\gamma}'(t)}_{\neq 0}$

(στροφή προς τα αριστερά) και εξετάζεις αν το διάστημα αυτό «δείχνει» προς το εσωτερικό του C, το οποίο είναι φραγμένο (Θ. Jordan)

1.1. Έστω $C = \bar{\gamma}([0,2\pi])$, $\bar{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,2\pi]$

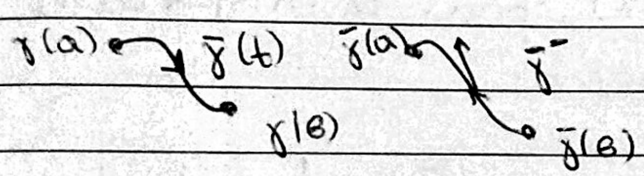


Εδώ η $\bar{\gamma}$ είναι θετικά προσανατολισμένη

$\bar{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

Μπορώ να θεωρήσω και την αντίστροφη της $\bar{\gamma}$

(αν $\bar{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ είναι $\boxed{\bar{\gamma}^-(\tau) := \bar{\gamma}(a+b-\tau),\ \tau \in [a,b]}$)



$$\bar{\gamma}^-(\tau) = \bar{\gamma}(\underbrace{a+b-\tau}_{=:\varphi(\tau)}) = (\bar{\gamma}\circ\varphi)(\tau), \quad \varphi : [a,b] \to \overset{[A,B]}{\overset{\shortparallel}{[a,b]}}$$

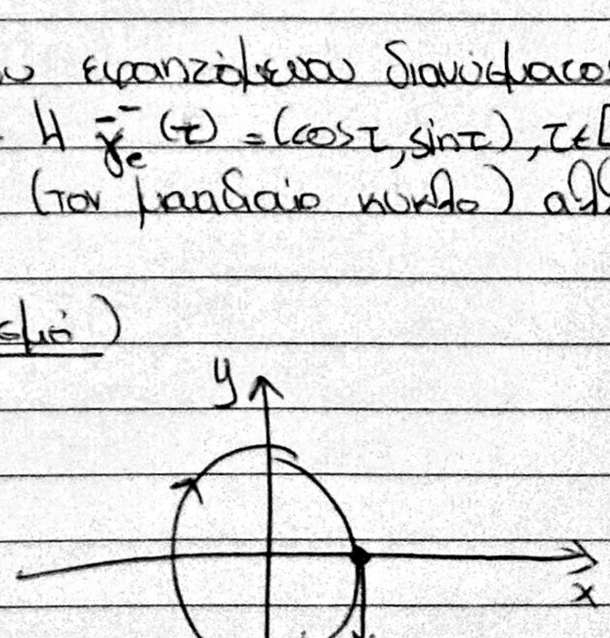
$$\varphi'(\tau) = -1 < 0$$

και παρατηρώ ότι $(\bar{\gamma}^-)'(\tau) = \bar{\gamma}'(a+b-\tau) \cdot \underbrace{\varphi'(\tau)}_{=-1}$

$$= -\bar{\gamma}'(a+b-\tau)$$

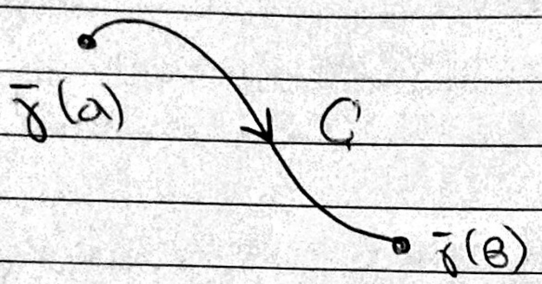
Στην πράξη: Η κατεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος μου δείχνει τον προσανατολισμό. Η $\bar{\gamma}_e^-(\tau) = (\cos\tau, \sin\tau)$, $\tau \in [0,2\pi]$ έχει την ίδια εικόνα με την $\bar{\gamma}_e$ (τον μοναδιαίο κύκλο) αλλά αντίστροφο προσανατολισμό

(δηλ. τον αρνητικό προσανατολισμό)



<u>Πρόταση</u> (SOS!)

Το μήκος μιας κανονικής καμπύλης $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ (*) είναι ανεξάρτητο από την παραμετρικοποίηση της $\bar{\gamma}([a,b])=C$



(*) (ισχύει από C^1 παραμετρικούς μετασχηματισμούς)

Έστω $\bar{J}=\bar{\gamma}\circ\varphi:[A,B]\to[a,b]$ όπου $\varphi:[A,B]\to[a,b]$ ένας C-π.μ.

ΤΟΤΕ $$L(\bar{J})=\int_A^B \|\underbrace{\bar{J}(\tau)}_{\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)}\|\,d\tau=\int_A^B \|\bar{\gamma}'(\varphi(\tau))\|\,|\varphi'(\tau)|\,d\tau$$

<u>ΚΑΙ</u> $$\int_a^b \|\bar{\gamma}'(t)\|\,dt = L(\bar{\gamma}) =: L(C)$$